UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS I (MA-1111)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

7 de marzo de 2017

Límites, Continuidad, Derivabilidad, Recta Tangente, Derivada

Resolución Segundo Parcial 2011 Septiembre-Diciembre Tipo A

1. Calcule los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3\tan x}-\sqrt{1-3\sin x}}{3x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3+x^2}}{x-2}$$

a) Mediante una racionalización apropiada podemos eliminar las raíces del numerador. Racionalizando y operando,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3\tan x}-\sqrt{1-3\sin x}}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-3\tan x}{3x^3(\sqrt{1-3\tan x}+\sqrt{1-3\sin x})}.$$

Luego, cancelando el factor común 3 y expandiendo el numerador para expresarlo en términos de senos y cosenos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3(\sqrt{1-3\tan x}+\sqrt{1-3\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x(\sqrt{1-3\tan x}+\sqrt{1-3\sin x})}.$$

Es importante notar que el numerador, $\sin x(\cos x-1)$, puede reescribirse como $-\sin x(1-\cos x)$. Por ende, la expresión puede escribirse como

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1-3\tan x}+\sqrt{1-3\sin x})},$$

y multiplicando por $(1+\cos x)$ *arriba y abajo* para obtener un término $\sin^2 x$ en el numerador, la expresión resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^3 x}{x^3\cos x(1+\cos x)(\sqrt{1-3\tan x}+\sqrt{1-3\sin x})}.$$

El objetivo de las manipulaciones fue obtener, de alguna forma, $\sin x/x$, para luego invocar el límite notable de ésta expresión cuando $x \to 0$. Tomando el límite del producto, podemos evaluar el límite directamente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos x(1+\cos x)(\sqrt{1-3\tan x}+\sqrt{1-3\sin x})} = -\frac{1}{4}.$$

b) Para evitar errores de signo, tomemos el cambio de variable $u = -x$. Bajo el cambio de variable, la expresión resulta

$$\lim_{u\to\infty} -\frac{\sqrt{3+u^2}}{u+2},$$

donde hemos tomado el signo del denominador fuera de la fracción por conveniencia. Luego, tomando un factor u^2 de la raíz y un factor u del denominador,

$$\lim_{u\to\infty} -\frac{u\sqrt{1+3u^{-2}}}{u(1+2u^{-1})} = \lim_{u\to\infty} -\frac{\sqrt{1+3u^{-2}}}{1+2u^{-1}}.$$

Finalmente, evaluando el límite directamente se obtiene que

$$\lim_{u\to\infty} -\frac{\sqrt{1+3u^{-2}}}{1+2u^{-1}} = -1.$$

2. Halle los valores de a, b y c tales que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ ax^2+bx+c, & 0 < x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$ y continua en $x = 1$.

De la condición de continuidad (suponiendo la existencia del límite),

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c),$$

se desprende que necesariamente los límites laterales deben coincidir. Es decir,

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x).$$

De forma similar, para garantizar la derivabilidad en un punto c es necesario que los límites laterales

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

coincidan. Pero además, se debe garantizar la continuidad en dicho punto también, puesto que si una función no es continua, no puede ser derivable. Entonces, para $x = 0$ habrá que escoger las constantes tal que se verifique la continuidad y derivabilidad, y para $x = 1$ sólo se tendrá que verificar la continuidad de f. De la condición de continuidad sobre $x = 0$ se obtiene directamente, evaluando los límites laterales, que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \implies c = 2.$$

Luego, de la condición de derivabilidad sobre $x = 0$, se obtiene que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \implies b = 1,$$

aunque el resultado puede obtenerse también conociendo las fórmulas derivadas de $x + 2$ y $ax^2 + bx + c$ e igualando las expresiones a medida que $x \to 0$; esto es equivalente a suponer la igualdad del los límites laterales de la derivada para hallar las constantes.

Finalmente, de la condición de continuidad para $x = 1$ se obtiene que

$$a + b + c = 2 \implies a = -1,$$

y por ende, f puede ser definida continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ como

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + x + 2, & 0 < x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Hay dos rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ que pasan por el punto $P = (0, 8)$. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes.

Empecemos por considerar una recta arbitraria

$$y = mx + b.$$

Notemos ahora que existen tres condiciones sobre la recta. La primera, que la recta debe pasar por el punto $(0, 8)$. Es decir, que el punto $(0, 8)$ debe satisfacer la ecuación de la recta,

$$8 = m \cdot 0 + b \implies b = 8.$$

La segunda condición es que, si nuestra recta es tangente, ésta debe tocar a la gráfica de $y = 4 - x^2$ en algún punto $(x_0, y_0) = (x_0, 4 - x_0^2)$. Es decir, que el punto $(x_0, 4 - x_0^2)$ debe satisfacer la ecuación de nuestra recta.

$$4 - x_0^2 = mx_0 + b = mx_0 + 8.$$

La tercera condición es que la pendiente de nuestra recta, por ser tangente, debe coincidir con la derivada de $y = 4 - x^2$ en x_0. Es decir,

$$m = -2x_0.$$

Luego, sustituyendo m en la ecuación de la segunda condición obtenemos que

$$4 - x_0^2 = -2x_0^2 + 8 \implies x_0^2 = 4,$$

y por ende, los valores de x_0 para los cuales se satisfacen las tres condiciones resultan

$$x_0 = 2 \qquad \text{y} \qquad x_0 = -2.$$

Como ya disponemos de una expresión para m en términos de x_0 (y b ya fue determinada de forma única), no es necesario recurrir a la fórmula punto-pendiente. Sustituyendo en la expresión para m, los valores de m correspondientes a cada x_0 son

$$m_1 = -4 \qquad \text{y} \qquad m_2 = 4,$$

y finalmente, las rectas tangentes a la gráfica de $y = 4 - x^2$ que pasan por el punto $P = (0, 8)$ son

$$l_1 : y = -4x + 8 \qquad \text{y} \qquad l_2 : y = 4x - 8.$$

4. Obtenga la derivada de las siguientes funciones

$$a)\ f(x) = \frac{\cos^2(\sin 2x)}{1 - \sqrt[3]{3x^2}} \qquad b)\ g(u) = \frac{u}{1-u} - \frac{u}{u+2}$$

a) Para derivar cocientes de funciones razonablemente complejas sin equivocarse solo es necesario mantener el orden del cálculo. En ese sentido, procedamos a calcular las derivadas del numerador y del denominador por separado. Evaluemos

$$\frac{d}{dx}\cos^2(\sin 2x).$$

Una forma sencilla de aplicar la regla de la cadena a largas composiciones de funciones es utilizar cambios de variable sucesivos de la siguiente manera: sean

$$u = \sin 2x \qquad w = \cos u \qquad z = w^2 = \cos^2(\sin 2x).$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx}\cos^2(\sin 2x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2w \cdot -\sin u \cdot 2\cos 2x.$$

Luego, sustituyendo de vuelta

$$\frac{d}{dx}\cos^2(\sin 2x) = -4\cos^2(\sin 2x)\sin(\sin 2x)\cos 2x.$$

Evaluando la derivada del denominador, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(1-\sqrt[3]{3x^2}) = \frac{d}{dx}\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{3}\right) = -\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}x^{-\frac{1}{3}},$$

y entonces evaluar la derivada del cociente se reduce a sustituir las derivadas del numerador y denominador apropiadamente, según la regla de derivación para el cociente.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{-4\cos^2(\sin 2x)\sin(\sin 2x)\cos 2x(1-\sqrt[3]{3x^2}) + \cos^2(\sin 2x)\left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)}{(1-\sqrt[3]{3x^2})^2}.$$

b) Puesto que las expresiones son sencillas, podemos aplicar la regla de la derivada de un cociente directamente a ambas. Derivando,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left(\frac{u}{1-u} - \frac{u}{u+2}\right) &= \frac{d}{du}\left(\frac{u}{1-u}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{u}{u+2}\right)\\ &= \frac{1-u-(-1)\cdot u}{(1-u)^2} - \frac{u+2-u}{(u+2)^2}\\ &= \frac{1}{(1-u)^2} - \frac{2}{(u+2)^2}.\end{aligned}$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Septiembre-Diciembre del 2011 (tipo A), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com